Etude de la variation d'une grandeur

METHODE

1. Les fonctions

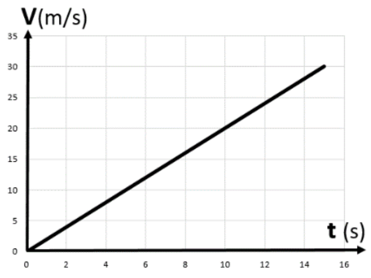
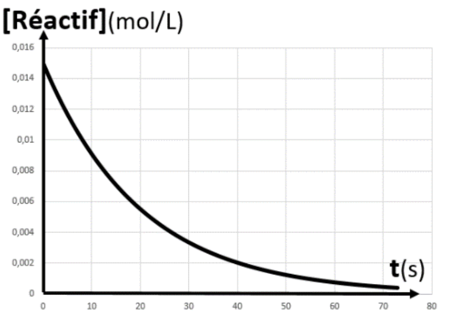
- Les fonctions décrivent le comportement d'une variable par rapport à une autre

EXEMPLES		
Distance parcourue par un objet en chute libre : d = f(t) ⇨ $d = 4,9 \times t^2$	à t = 0, l'objet est immobile à son point de départ	à t = 10 s, l'objet a chuté d'une distance de 49 m
Variation de la vitesse V d'un véhicule en fonction du temps t : V = f(t) ⇨ $V = 2 \times t$	à t = 0, la vitesse du véhicule est de 0 m/s	à t = 10 s, la vitesse du véhicule est de 20 m/s
Variation de la concentration d'un réactif en fonction du temps : [réactif] = f(t) ⇨ $[\text{réactif}] = 0,015 \times e^{-0,05t}$	à t = 0, la concentration du réactif est de 0,015 mol/L	à t = 10 s, la concentration du réactif est de 0,009 mol/L

Remarque : en sciences physiques, on étudie très souvent le comportement d'une variable en fonction du temps

2. Les représentations graphiques

- Pour visualiser plus facilement le comportement relatif des variables, on utilise une représentation graphique, ou courbe.

EXEMPLES		
Distance parcourue par un objet en chute libre : $d = 4,9 \times t^2$	Variation de la vitesse V d'un véhicule en fonction du temps t : $V = 2 \times t$	Variation de la concentration d'un réactif en fonction du temps : $[\text{réactif}] = 0,015 \times e^{-0,05t}$
		

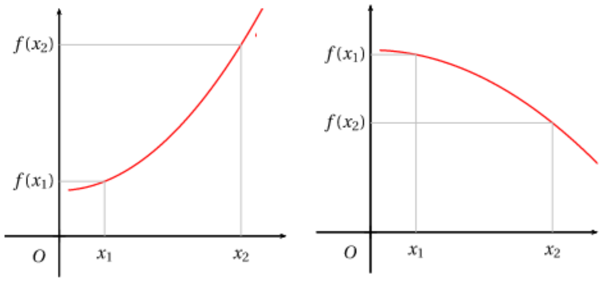
3. Le nombre dérivé

• En sciences physiques, pour étudier plus précisément les variations des grandeurs en fonction du temps, on est amené, à tracer la tangente à la courbe en un point particulier, et à déterminer la pente de cette tangente.

Mais comment peut-on déterminer le coefficient directeur *(ou pente)* **de cette droite tangente ?**

Ce coefficient directeur (que l'on notera « a ») **est également appelé « nombre dérivé »**

- Si la courbe est croissante, la valeur de a est positive
- Si la courbe est décroissante, la valeur de a est négative



fonction croissante — fonction décroissante

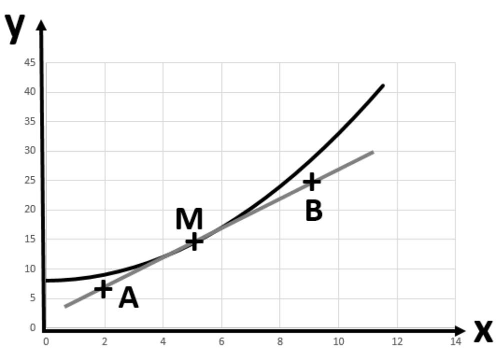
Méthode 1 :	« Si on dispose seulement de la représentation graphique de la fonction »

(1) On cherche 2 points A et B sur la droite tangente dont on peut déterminer facilement les coordonnées

$A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$

(2) Le coefficient directeur (ou *pente*) **de la tangente à la courbe en M**, ou **le nombre dérivé de la fonction au point M** est donné par la formule : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

EXEMPLE : on veut déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point M d'abscisse $x_M = 5$



A et B sont 2 points appartenant à la tangente dont on peut déterminer facilement les coordonnées

A (2 ; 6) et B (9 ; 25)

Le coefficient directeur (ou *pente*) **de la tangente à la courbe en M**, ou **le nombre dérivé de la fonction au point M** est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{25-6}{9-2} = 2{,}7$$

Méthode 2 :	« Si on dispose des valeurs des points qui ont permis d'obtenir la courbe »

Le coefficient directeur (ou *pente*) **de la tangente à la courbe en M(x_i, yi)** , ou **le nombre dérivé de la fonction au point M** est : $a = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$

EXEMPLE : on veut déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point M d'abscisse $x_M = 5$

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
y	8	8,0625	8,25	8,5625	9	9,5625	10,25	11,0625	12	13,0625	14,25	15,5625	17

$$a = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{15,5625 - 14,25}{5,5 - 5} = 2,6$$

Méthode 3 :	« Si on dispose de l'expression de la fonction ou équation de la courbe y = f(x) »

(1) On calcule la dérivée de la fonction f(x) que l'on note f'(x) ou $\dfrac{df}{dx}(x)$

(2) Le coefficient directeur (ou *pente*) **de la tangente à la courbe en M**, ou **le nombre dérivé de la fonction au point M** est donné par la formule

$$a = f'(x_M) = \frac{df}{dx}(x_M)$$

RAPPEL	
Fonction f(x)	Dérivée f'(x)
f(x) = a	f'(x) = 0
f(x) = x	f'(x) = 1
f(x) = a x + b	f'(x) = a
f(x) = x^2	f'(x) = 2 x
f(x) = a e^{bx}	f(x) = a.b e^{bx}
Exemples	
f(x) = 5 x^3 - 2 x^2 + 7 x - 4	*f'(x) = 15 x^2 - 4 x + 7*
f(x) = 6 e^{-3x}	*f(x) = -18 e^{-3x}*

EXEMPLE : on veut déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point M d'abscisse $x_M = 5$

L'équation de la courbe est $y = 0,25x^2 + 8$

on a $f(x) = 0,25x^2 + 8$ ↳ $\dfrac{df}{dx}(x) = 0,5x$

$$a = f'(x_M) = \frac{df}{dx}(x_M) = 0,5 \times 5 = 2,5$$

Remarques

- **La méthode 3** donne la vraie valeur du coefficient directeur de la tangente. C'est donc la méthode à utiliser de préférence.
- **Dans la méthode 1**, il faut tracer la tangente à la courbe, ce qui occasionne une approximation. De plus la détermination graphique des coordonnées des points choisis rajoute également des erreurs.
- **La méthode 2 sera** d'autant plus précise que les valeurs données x_i, x_{i+1}, sont proches les unes des autres. Donc l'intervalle séparant 2 valeurs de x consécutives doit être le plus petit possible.