Séquence 4	La chute libre	Exercices

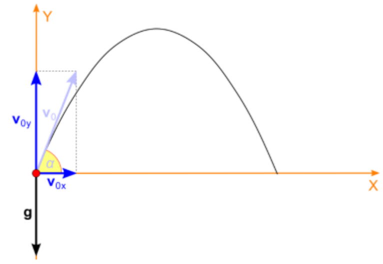
Exercice 1

1) 2)

Référentiel	Système	Bilan des forces
terrestre	centre de gravité du boulet	$\vec{P}$

Coordonnées initiales	
du vecteur-position :	du vecteur-vitesse :
$\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$	$\vec{v_0}\begin{cases} v_{x0} = v_0 \cos\alpha \\ v_{y0} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$

3) *Coordonnées du vecteur accélération* : la 2[nde] loi de Newton permet d'écrire



$$\sum \vec{F} = m \times \vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m \times \vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m \times \vec{a} \Rightarrow \vec{g} = \vec{a}$$

$$\boxed{\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}}$$

Equations horaires de la vitesse du boulet $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = cte \\ v_y = -gt + cte \end{cases}$

avec les conditions initiales $\vec{v_0}\begin{cases} v_{x0} = v_0 \cos\alpha \\ v_{y0} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$ **on obtient** $\boxed{\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}}$

Equations horaires de la position du boulet

$$\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \times t + cte \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \times t + cte \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ **on obtient** $\boxed{\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \times t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \times t \end{cases}}$

4) *Sommet de la trajectoire*

Lorsque le boulet atteint le sommet de la trajectoire le vecteur vitesse est horizontal : on a alors $v_y = 0$

$$v_y(t_{sommet}) = -gt_{sommet} + v_0 \sin\alpha = 0 \rightarrow t_{sommet} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{60 \times \sin 70°}{10} = \textbf{5,6 s}$$

Hauteur atteinte: il faut déterminer la valeur de y lorsque t = 5,6 s :

$$y(t = 5,6s) = -\frac{1}{2} \times 10 \times 5,6^2 + 60 \sin 70° \times 5,6 = \textbf{159 m}$$

5) *Altitude du boulet à l'abscisse x = 200 m* : $x(t) = 60 \cos 70° \times t = 200 \rightarrow t = \frac{200}{60 \cos 70°} = \textbf{9,75 s}$

$$y = -5t^2 + 60 \sin 70° \times t = -5 \times 9,75^2 + 60 \sin 70° \times 9,75 = \textbf{74,4 m}$$

Le boulet passe largement au-dessus du rempart de 20 m

6) *Abscisse x_A du boulet lorsqu'il heurte le sol :* Lorsque le boulet heurte le sol on a $Y_A = 0$

$$y_A = -5t^2 + 60\sin 70° \times t = 0$$

$$-5t^2 + 60\sin 70° \times t = 0 \rightarrow 5t \times \left(-t + 12\sin 70°\right) = 0 \rightarrow t = 12\sin 70° = \mathbf{11{,}3\ s}$$

Calculons la valeur de x lorsque t = 11,28 s : $x_A = 60\cos 70° \times 11{,}3 = \mathbf{232\ m}$

Le boulet heurte le sol 231 m après son lancer

Valeur de la vitesse lorsque le boulet heurte le sol :

$$\overrightarrow{v}\begin{cases} v_x(t = 11{,}3) = v_0\cos\alpha = 60 \times \cos 70° = 20{,}5 \\ v_y(t = 11{,}3) = -gt + v_0\sin\alpha = -10 \times 11{,}3 + 60\sin 70° = -56{,}6 \end{cases}$$

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{20{,}5^2 + (-56{,}6)^2} = \mathbf{60\ m.s^{-1} = 216\ km.h^{-1}}$$

La vitesse du boulet lorsqu'il heurte le sol est égale à sa vitesse initiale.

Exercice 2

1) *Coordonnées du vecteur-accélération du centre d'inertie*

Le système dauphin, de masse m et de centre d'inertie G, est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le repère d'étude est le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). En négligeant les actions de l'air, le dauphin n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$

La deuxième loi de Newton permet d'écrire :

$$\sum \overrightarrow{F} = m \times \overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{P} = m \times \overrightarrow{a} \Rightarrow m\overrightarrow{g} = m \times \overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{g} = \overrightarrow{a}$$

En projection dans le repère : $\boxed{\overrightarrow{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}}$

2) *Coordonnées du vecteur-vitesse :* On a : $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$; avec $\overrightarrow{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$ on obtient $\vec{V}\begin{cases} V_x(t) = Cte \\ V_y(t) = -gt + Cte \end{cases}$

Initialement : $\overrightarrow{v_0}\begin{cases} v_{x0} = v_0\cos\alpha \\ v_{y0} = v_0\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0\sin\alpha \end{cases}}$

3) *Equations horaires du mouvement*

On a : $\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$; avec $\overrightarrow{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\alpha \\ v_y(t) = -gt + v_0\sin\alpha \end{cases}$ on obtient $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = V_0.\cos\alpha.t + Cte \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin\alpha.t + Cte \end{cases}$

Initialement : $\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = v_0\cos\alpha \times t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha \times t \end{cases}}$

4) Lorsque le dauphin atteint le sommet de sa trajectoire, sa vitesse est horizontale. On a alors $v_y = 0$

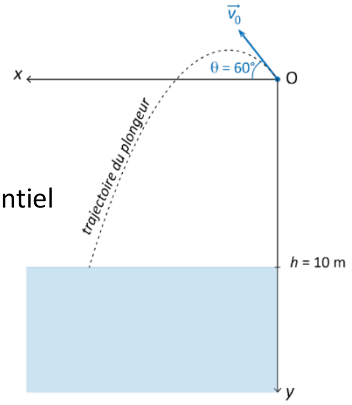
$$v_y(t) = -gt + v_0\sin\alpha = 0 \rightarrow t_{sommet} = \frac{v_0\sin\alpha}{g} = \frac{10\sin 60°}{10} = \mathbf{0{,}87\ s}$$

5) *Hauteur du saut* : Calculons la valeur de y lorsque t = 0,87 s :

$$y = -\frac{1}{2}\times 10\times 0,87^2 + 10\times \sin(60)\times 0,87 = 3,7499 \text{ m} \approx \mathbf{3,7\ m} > 3 \text{ m.}$$

Le saut est donc réellement d'au moins 3 mètres de haut.

Exercice 3



1) *Forces négligées dans le cadre de cette étude*

Nous négligeons la force de frottement et la poussée d'Archimède. Dans le référentiel terrestre, on suppose que le plongeur n'est soumis qu'à la seule action de son poids :

$$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{P}$$

2) *Coordonnées du vecteur-accélération du centre d'inertie*

la 2nde loi de Newton permet d'écrire

$$\sum \overrightarrow{F} = m\times \overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{P} = m\times \overrightarrow{a} \Rightarrow m\overrightarrow{g} = m\times \overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{g} = \overrightarrow{a}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases}}$$

3) *Coordonnées du vecteur-vitesse au cours du mouvement* : $\overrightarrow{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v}\begin{cases} v_x = cte \\ v_y = gt + cte \end{cases}$

avec les conditions initiales $\overrightarrow{v_0}\begin{cases} v_{x0} = v_0\cos\theta \\ v_{y0} = -v_0\sin\theta \end{cases}$ **on obtient** $\boxed{\overrightarrow{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\theta \\ v_y(t) = gt - v_0\sin\theta \end{cases}}$

4) *Coordonnées du vecteur-position du point étudié*

$$\overrightarrow{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\theta \\ v_y(t) = gt - v_0\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = v_0\cos\theta\times t + cte \\ y(t) = \frac{1}{2}gt^2 - v_0\sin\theta\times t + cte \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ on a $\boxed{\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = v_0\cos\theta\times t \\ y(t) = \frac{1}{2}gt^2 - v_0\sin\theta\times t \end{cases}}$

5) *Date t_{sommet} à laquelle l'athlète atteint le sommet de sa trajectoire*.

Lorsque le plongeur atteint le sommet de sa trajectoire $\Rightarrow$ on a un vecteur vitesse horizontal donc $v_y = 0$

$$v_y(t_{sommet}) = g\times t_{sommet} - v_0\sin\theta = 0 \rightarrow t_{sommet} = \frac{v_0\sin\theta}{g} = \frac{3\times\sin 60°}{10} = \mathbf{0,26\ s}$$

Coordonnées de ce sommet S

Coordonnées du sommet : il faut calculer les coordonnées du vecteur position lorsque t = 0,26 s

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x_S = 3\cos 60\times 0,26 = 0,39 \text{ m} \\ y_S = \frac{1}{2}\times 10\times 0,26^2 - 3\sin 60\times 0,26 = -0,34 \text{ m} \end{cases}$$

6) *Le plongeur touche la surface de l'eau* : Lorsque le plongeur touche la surface de l'eau on y = h = 10 m

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 - v_0 \sin\theta \times t = h \Rightarrow 5t^2 - 3\sin 60 \times t - 10 = 0 \Rightarrow 5(t - 1,70)(t + 1,18) = 0$$

La solution physiquement possible est **t = 1,70 s**

7) *Valeur de la vitesse à laquelle le plongeur atteint la surface de l'eau*

$$\overrightarrow{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\theta = 3\cos 60° = 1,5 \text{ m.s}^{-1} \\ v_y(t) = gt - v_0 \sin\theta = 10 \times 1,7 - 3\sin 60° = 14,40 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1,5^2 + 14,4^2} = \mathbf{14,4\ m.s^{-1}}$$

Exercice 4

1) *Équations horaires paramétriques et trajectoire*

1.1. La balle, dans le référentiel terrestre galiléen, est soumise uniquement à son poids $\vec{P}$. En effet d'après l'énoncé « l'action de l'air est négligeable » : on ne tient pas compte de la poussée d'Archimède et de la force de frottement de l'air sur la balle. Et la raquette n'agit plus pendant le mouvement de la balle.

Les caractéristiques du poids $\vec{P} = m.\vec{g}$ sont :

- direction : verticale
- sens : vers le bas
- expression : P = m.g
- valeur (= grandeur) : P = $58,0 \times 10^{-3} \times 9,81$ = 0,569 N

1.2. *Coordonnées du vecteur-accélération du centre d'inertie :* La deuxième loi de Newton permet d'écrire :

$$\sum \overrightarrow{F} = m \times \overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{P} = m \times \overrightarrow{a} \Rightarrow m\overrightarrow{g} = m \times \overrightarrow{a} \Rightarrow \overrightarrow{g} = \overrightarrow{a}$$

En projection dans le repère : $\boxed{\overrightarrow{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}}$

1.3. *Equations horaires du mouvement*

On a : $\vec{a}_G = \frac{d\vec{V}}{dt}$; avec $\overrightarrow{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$ on obtient $\vec{V}\begin{cases} V_x(t) = Cte \\ V_y(t) = -gt + Cte \end{cases}$

Initialement : $\vec{V}\begin{cases} V_x(t_0) = V_0 \\ V_y(t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}}$

On a : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$; avec $\overrightarrow{v}\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$ on obtient $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = V_0.t + Cte \\ y(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + Cte \end{cases}$

Initialement : $\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = H \end{cases} \Rightarrow$ finalement : $\boxed{\overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = v_0 \times t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H \end{cases}}$

2) *Qualité du service*

2.1. *La balle passe au niveau du filet :* Calculons à quel moment la balle passe au niveau du filet ;

on a alors x = OF = 12,2 m

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) = v_0 \times t \\ y(t) = -\frac{1}{2}\times g \times t^2 + H \end{cases}$$

$$x = v_0 \times t = 12{,}2 \rightarrow t = \frac{12{,}2}{v_0} = \frac{12{,}2}{35} = \mathbf{0{,}35\ s}$$

126 km.h⁻¹ = 35 m.s⁻¹

Calculons la valeur de y lorsque t = 0,35 s

$$y = -\frac{1}{2}\times g \times t^2 + H = -\frac{1}{2}\times 9{,}81 \times 0{,}35^2 + 2{,}2 = \mathbf{1{,}60\ m > 0{,}920\ m}$$

➥ La balle passe donc au-dessus du filet

2.2. *Qualité du service :* La balle frappe le sol en un point B' tel que $y_{B'} = 0$

$$y = -\frac{1}{2}\times g \times t^2 + H = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\times g \times t^2 = H \rightarrow t = \sqrt{\frac{2\times H}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 2{,}2}{9{,}81}} = \mathbf{0{,}67\ s}$$

$x = v_0 \times t = 35 \times 0{,}67 = \mathbf{23{,}5\ m}$ ➥ Donc $x_{B'}$ > 18,7 m, le service est effectivement « mauvais ».

Exercice 5

1) *Hauteur de la flèche à l'instant initial* $\overrightarrow{OM}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1{,}60\ m \end{cases}$ ➥ **la flèche est à h = 1,60 m au dessus du sol**

2) *Coordonnées $v_x(t)$ et $v_y(t)$ de la pointe de la flèche*

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) = 90 \times t \\ y(t) = 1{,}60 - 5{,}0 \times t^2 \end{cases} ➥ \boxed{\overrightarrow{v}\begin{cases} v_x(t) = 90\ m.s^{-1} \\ v_y(t) = -10{,}0 \times t \end{cases}}$$

3) *Coordonnées initiales v_{x0} et v_{y0} du vecteur vitesse :* A t = 0 ➥ $\overrightarrow{v}\begin{cases} v_x(t_0) = 90\ m.s^{-1} \\ v_y(t_0) = 0 \end{cases}$

4) *Coordonnées de son vecteur-accélération*

$$\overrightarrow{v}\begin{cases} v_x(t) = 90\ m.s^{-1} \\ v_y(t) = -10{,}0 \times t \end{cases} ➥ \boxed{\overrightarrow{a}\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -10{,}0\ m.s^{-2} \end{cases}}$$

Ces coordonnées correspondent à celles du champ de pesanteur $\vec{g}$: il s'agit d'une chute libre.

5) *Durée que va mettre sa flèche pour atteindre la cible*

Lorsque la pointe atteint la cible en I, la distance parcourue sur l'axe Ox est de 25 m ➥ x = 25 m

$$x(t) = 90 \times t = 25 \rightarrow t = \frac{25}{90} = \mathbf{0{,}28\ s}$$

6) *Nombre de points de points* : $y(t) = 1{,}60 - 5{,}0 \times t^2$ ➥ $y(t = 0{,}28) = 1{,}60 - 5{,}0 \times 0{,}28^2 = \mathbf{1{,}2\ m}$

La distance entre ce point d'impact et le centre de la cible vaut :

$\Delta y = 1{,}60 - 1{,}2 = 40\ cm$: le point d'impact est donc 40 cm en dessous du centre de la cible

40/6 = 6,6 ➥ la fléche se trouve entre la 6ième et la 7ième zone

la flèche atteint le premier cercle noir, l'archer marque 4 points.