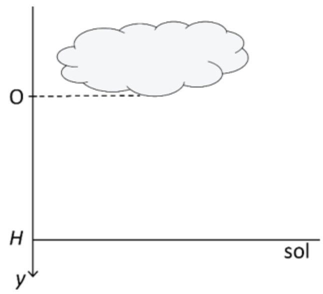
Séquence 5	**Mouvement dans un fluide**	*Exercices*

Exercice 1

Dans cet exercice on désire modéliser le mouvement d'une goutte d'eau chutant d'un nuage.

La goutte d'eau, modélisée comme une sphère, tombe de la base d'un nuage situé à une altitude de valeur $H = 1200$ m au-dessus du sol. L'origine des dates est l'instant où la goutte quitte le nuage, sa vitesse initiale est nulle.



Données :

- Intensité du champ de pesanteur terrestre $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Masse volumique de l'air : $\rho_{air} = 1{,}3.10^{-3} \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1} = 1{,}3.10^{-3}\ kg \cdot \text{L}^{-1}$
- Masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1} = 1\ kg \cdot \text{L}^{-1}$
- Volume de la goutte d'eau V = 0,04 mL
- Masse de la goutte d'eau : m = 40 mg

1) Modèle de la chute libre

1.1. En supposant que la goutte est en chute libre, exploiter la seconde loi de Newton pour établir la loi horaire $y(t)$ de son mouvement.

1.2. Montrer que, lorsque la goutte atteint le sol, on a la relation $v = \sqrt{2gH}$

1.3. Calculer la valeur de la vitesse de la goutte lorsqu'elle atteint le sol. Exprimer cette vitesse en kmh^{-1}. Que penser de cette valeur ??

2) Prise en compte des actions de l'air

2.1. On note $\vec{P}$ le poids de la goutte et $\overrightarrow{\Pi_a}$ la poussée d'Archimède exercée par l'air.

- Montrer que la valeur de la poussée d'Archimède est négligeable devant la valeur du poids de la goutte d'eau

2.2. La force de frottement qu'exerce l'air sur la goutte de pluie n'est, elle, pas négligeable. Elle vaut : $f = kv$

Avec dans cette situation : $k = 4{,}4 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$.

- En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle satisfaite par v au cours du mouvement est : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$

2.3. Vérifier que l'expression suivante est bien une solution de l'équation différentielle et qu'elle respecte la condition initiale $v(t) = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

2.4. À partir de l'expression précédente, exprimer et calculer la vitesse limite atteinte par la goutte de pluie.

2.5. Calculer la valeur du temps caractéristique $\tau = \frac{m}{k}$

2.6. On estime que le régime permanent est atteint lorsqu'il s'est écoulé une durée égale à 5τ, τ étant le temps caractéristique de la chute.

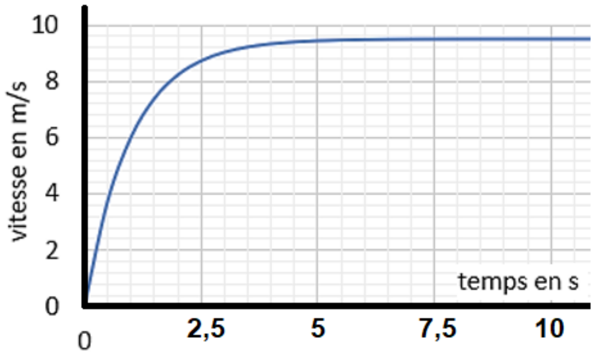
- Quand dit-on que la goutte d'eau atteint le régime permanent ?

- Que peut-on dire alors de la valeur de la force de frottement par rapport à la valeur du poids de la goutte d'eau. Représenter ces 2 forces sur un schéma (sans souci d'échelle)

- Au bout de combien de temps, le régime permanent est-il atteint ?

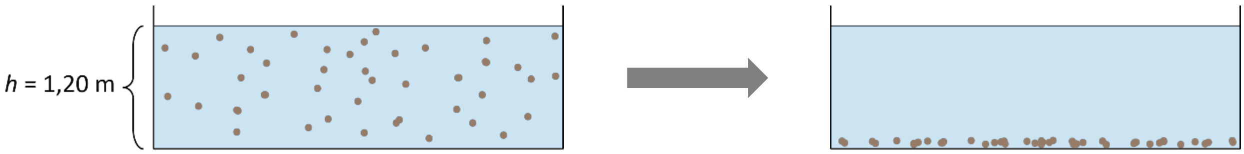
2.7. On donne ci-contre la représentation graphique de la vitesse de la goutte en fonction du temps :

- Exploiter ce graphique pour vérifier la valeur du temps caractéristique



Exercice 2

Une des étapes du traitement des eaux chargées de particules en suspension consiste à les faire transiter dans des grands bassins, dans lesquels les particules en suspension se déposent lentement. Les chantiers de construction utilisent cette technique pour éliminer les particules en suspension avant de rejeter les eaux.



représentation schématique de la décantation dans le bassin

La taille du bassin est directement liée à la durée nécessaire pour qu'une particule ait le temps de se déposer.
Le but de cet exercice est de déterminer la durée moyenne au bout de laquelle des particules d'argile atteignent le fond du bassin.

Données :

- Intensité du champ de pesanteur terrestre $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- volume moyen d'une particule fine $V = 3{,}4 \times 10^{-11} \text{ m}^3$
- masse volumique de l'argile $\rho_a = 1600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- masse volumique de l'eau $\rho_e = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- force de frottement : $f = k \times v$ avec $k = 3{,}8 \times 10^{-6}$ N.s.m^{-1}

1) Faire un schéma pour représenter l'ensemble des forces appliquées à une particule en train de se déposer.

2) On admettra que le mouvement est vertical, vers le bas et que la particule n'a pas de vitesse initiale.

- En utilisant un repère d'étude (Oy) ayant pour origine la position d'une particule d'argile en surface du bassin de décantation à $t = 0$, et orienté vers le bas, appliquer la deuxième loi de Newton et établir l'équation différentielle satisfaite par $v(t)$.

Montrer que l'on obtient la relation : $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{\rho_a V} v = g\left(1 - \frac{\rho_e}{\rho_a}\right)$

3) Montrer que l'équation différentielle permet d'écrire la vitesse limite sous la forme $v_{lim} = \frac{gV}{k}(\rho_a - \rho_e)$;
Calculer la valeur de la vitesse limite

4) Calculer la valeur du temps caractéristique τ de la chute.

5) On estime que le régime permanent est atteint lorsqu'il s'est écoulé une durée égale à 5τ

- Pourquoi peut-on dire que la particule atteint sa vitesse limite dès son départ ?

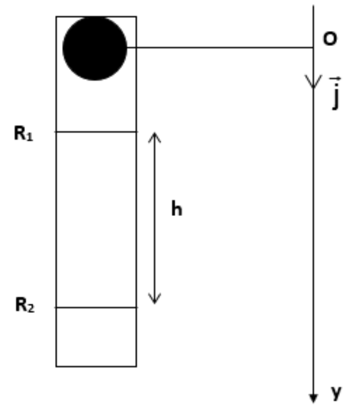
- Calculer alors la durée que met une particule pour tomber au fond du bassin, en admettant que sa vitesse est en régime permanent dès son départ.

Exercice 3

La glycérine connue aussi sous le nom du glycérol se présente sous la forme d'un liquide transparent, visqueux, incolore et non toxique.

On se propose dans cet exercice de déterminer dans une première partie, la valeur expérimentale de la viscosité de ce liquide. La deuxième partie, théorique, utilise une méthode numérique pour simuler le mouvement de chute d'une bille dans ce liquide.

1) Mesure de la viscosité de la glycérine



La viscosité désigne la capacité d'un fluide à s'écouler. Elle dépend fortement de la température.

Pour mesurer la viscosité de la glycérine, on utilise un dispositif appelé viscosimètre de HOEPLER (ou viscosimètre à chute de bille).

Il se compose d'un long tube de verre vertical, rempli du liquide étudié, dans lequel on laisse tomber une bille sphérique en acier de diamètre calibré.

La durée de chute $\Delta t'$ correspondant à une distance de chute h connue est mesurée à l'aide de deux capteurs reliés à un chronomètre électronique. Les deux capteurs sont repérés par les positions R_1 et R_2 comme le montre le schéma de la figure ci-dessus.

Données :

- Rayon de la bille : r = 5,0 mm
- Masse volumique de la bille : $\rho = 7{,}8.10^3$ kg.m^{-3}
- Masse volumique de la glycérine : $\rho_0 = 1{,}3.10^3$ kg.m^{-3}
- Intensité de la pesanteur : g = 9,81 m.s^{-2}
- Volume d'une sphère : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

On étudie le mouvement de la bille dans le référentiel terrestre (considéré comme galiléen) muni d'un repère (O, $\vec{j}$). O est l'origine du repère. Son vecteur unitaire $\vec{j}$ est vertical et orienté vers le bas. La bille totalement immergée dans le liquide, est abandonnée du point O sans vitesse initiale.

1.1. Représenter sur un schéma, sans souci d'échelle, les forces appliquées à la bille en mouvement dans le liquide : son poids $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{P}_A$ et la force de frottement fluide $\vec{f}$.

1.2. Exprimer littéralement la valeur *P* du poids de la bille en fonction de ρ, *V* et *g.*

1.3. Exprimer la valeur P_A de la poussée d'Archimède en fonction de ρ_0, *V* et *g.*

1.4. Lors de sa chute, la bille atteint rapidement sa vitesse limite v_{lim} avant son passage au niveau du repère R_1.

- Quel est le mouvement de la bille entre les deux repères R_1 et R_2? Justifiez votre réponse.

- Quelle est alors la relation vectorielle liant les forces appliquées à la bille ? Justifiez votre réponse.

1.5. Dans le cas du fluide étudié, la force de frottement est proportionnelle à la vitesse v de chute de la bille :

$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}$ avec $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{6.\pi.\eta.r}$ où η(kg.m^{-1}.s^{-1}) est la viscosité de la glycérine et r le rayon de la bille

- En projetant la relation vectorielle établie dans la question 1.4. suivant le repère (O, $\vec{j}$), montrer que la viscosité η du fluide étudié s'exprime par la relation : $\eta = \frac{2r^2 g(\rho - \rho_0)}{9v_{lim}}$

1.6. On mesure la durée de chute de la bille en mouvement rectiligne uniforme entre les repères R_1 et R_2 distants d'une hauteur h = 40,0 cm. On obtient $\Delta t'$ = 1,66 s à la température θ = 20°C.

- Calculer la vitesse limite v_{lim} de la bille.

- En déduire la valeur expérimentale de la viscosité h de la glycérine à la température d'étude.

2) Étude théorique du mouvement de la bille

À l'instant choisi comme origine des dates, la bille est abandonnée sans vitesse initiale au point O.

Données :

- Dans cette partie, on écrira f sous la forme $f = k \times v$ avec k = 0,14 kg.s^{-1}
- Masse volumique de la bille : ρ = 7,8.10^{3} kg.m^{-3}
- Masse volumique de la glycérine : ρ_0 = 1,3.10^{3} kg.m^{-3}
- Intensité de la pesanteur : g = 9,81 m.s^{-2}
- Volume d'une sphère : V = 5,2.10^{-7} m^{3}

2.1. En utilisant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle liant la vitesse de la bille et sa dérivée par rapport au temps est de la forme : $\frac{dv}{dt} + Av = B$

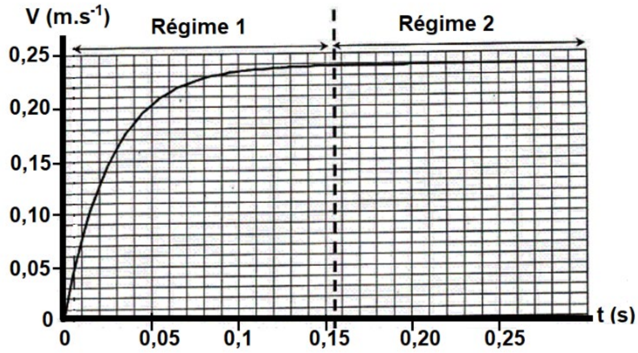
Avec $A = \frac{k}{\rho V}$ et $B = g\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)$

2.2. Calculer les valeurs de A(s^{-1}) et de B(m.s^{-2})

2.3. En déduire la valeur de la vitesse limite atteinte par la bille. Montrer que l'on retrouve bien la valeur de la vitesse limite déterminée dans la 1ère partie.

2.4. À quelle grandeur physique le rapport 1/A correspond-il ?

2.5. La courbe d'évolution v = f(t) de la vitesse au cours du temps est représentée sur la figure ci-contre.

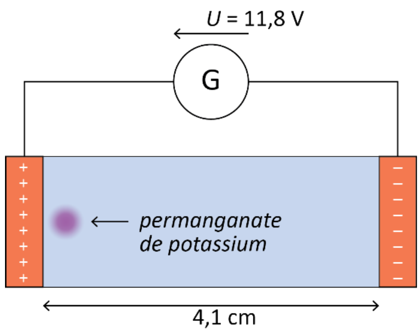


La courbe permet de mettre en évidence deux régimes distincts pour le mouvement de la bille. Ces deux régimes sont séparés par le trait en pointillé vertical dessiné sur le graphe.

- Nommer ces 2 régimes

- Déterminer graphiquement le temps caractéristique τ en prenant soin d'expliquer la méthode utilisée.

Exercice 4

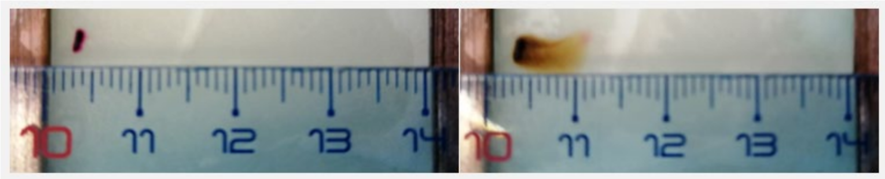


Afin d'estimer le diamètre d'un ion permanganate hydraté $MnO^-_{4(aq)}$, on réalise le dispositif suivant : une goutte de permanganate de potassium est déposée sur un papier imbibé d'une solution conductrice, elle-même placée entre deux électrodes :

On modélise ainsi la situation :

- Chaque ion permanganate est soumis à une force électrostatique $\overrightarrow{F_{el}}$ et à une force de frottement visqueux $\vec{f}$ dont la valeur s'exprime par : $f = 6\pi\eta Rv$
  - $\eta = 1{,}0 \times 10^{-3}$ Pa · s est la viscosité du milieu ;
  - R est le rayon de l'ion, supposé sphérique ;
  - v est la valeur de sa vitesse.
- L'ion adopte quasi-instantanément sa vitesse limite de déplacement.

Les deux photos ci-contre ont été prises à $\Delta t = 28\,min$ d'intervalle ; On estime le déplacement de 9 mm



1. Calculer la valeur E du champ électrostatique qui règne entre les deux électrodes (on assimilera le dispositif à un condensateur plan).

2. Donner l'expression de la force électrostatique subie par un ion de charge q placé dans un champ électrique $\vec{E}$.

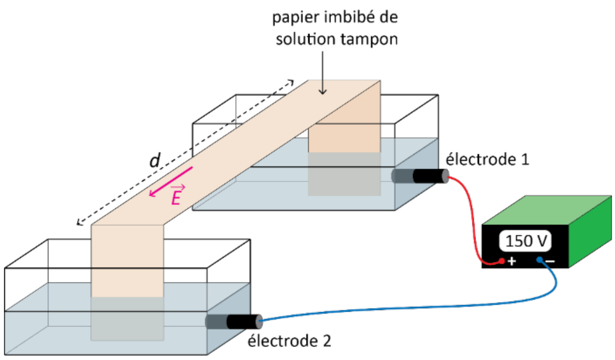
3. Quelle relation peut-on écrire entre les valeurs F_{el} et f des forces qui s'exercent sur chaque ion ? Justifier à l'aide des informations du préambule.

4. Déduire de la question précédente l'expression du rayon R en fonction de e (charge élémentaire), η, E et v.

5. Exploiter les photos du document pour calculer numériquement le rayon R d'un ion permanganate.

Exercice 5

L'électrophorèse est une technique très utilisée en biologie pour séparer des protéines. Cette méthode de séparation est basée sur la différence de vitesse de migration des ions placés dans un champ électrostatique uniforme, selon leur charge électrique et leur taille.
Un mélange de protéines est ionisé, puis déposé au centre d'un support horizontal (papier d'acétate de cellulose) soumis à un champ électrostatique uniforme crée par une tension U entre deux électrodes :



Dans ce cas, chaque constituant chargé du mélange est soumis :

- à la force électrostatique $\overrightarrow{F_E}$;
- à la force de frottement fluide modélisée par $\vec{f} = -kr\vec{v}$ où :
  - $\rightarrow$ k est une constante positive caractéristique du milieu de migration,
  - $\rightarrow$ r le rayon de Stokes qui est d'autant plus grand que la molécule est volumineuse
  - $\rightarrow$ v la valeur de la vitesse de migration du constituant.

En régime permanent, la force de frottement fluide compense exactement la force électrostatique.

1. Pourquoi est-il nécessaire d'ioniser les protéines à analyser ?

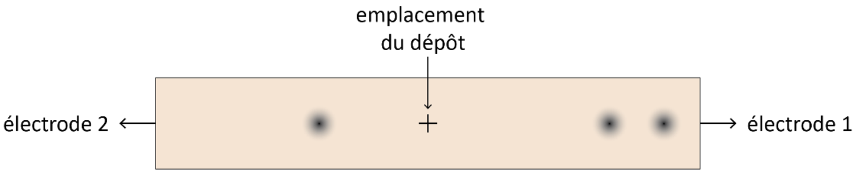
2. En régime permanent, quelle est la nature du mouvement des ions ?

3. Dans quel sens se déplace un ion de charge électrique positive, négative ?

4. Déterminer l'expression de la vitesse de migration en régime permanent en fonction de $|q|$, E k et r.

5. Tous les ions se déplacent-ils à la même vitesse ? Quelles sont les caractéristiques des constituants les plus rapides ?

6. Au bout d'une heure, on coupe le champ électrique et on pulvérise sur le papier d'acétate de cellulose une solution révélatrice qui colore les acides aminés : ceux-ci deviennent ainsi visibles sur la feuille de papier.



6.1. Combien de constituants ont été séparés dans le mélange par cette méthode ?

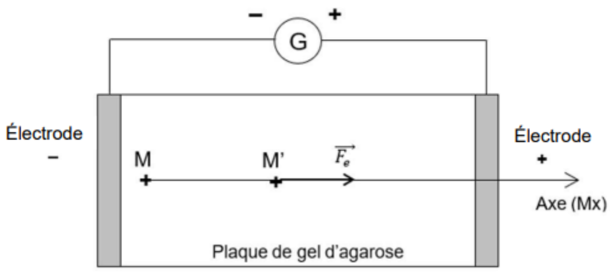
6.2. Que peut-on dire de la charge électrique de chacun d'entre eux ?

Exercice 6

L'objectif de cet exercice est de déterminer la durée de migration nécessaire pour séparer deux acides aminés, l'acide aspartique et l'acide glutamique, par électrophorèse.

PARTIE A – Principe de l'électrophorèse

Une goutte d'un mélange des deux acides aminés à séparer est déposée (point M de la figure ci-dessous) sur une plaque horizontale recouverte de gel d'agarose et soumise à un champ électrostatique, dont la norme est notée E.



Les acides aminés, sous forme anionique au pH imposé (ion aspartate et ion glutamate), migrent vers l'électrode positive sous l'effet de la force électrostatique, notée $\vec{F_e}$ et représentée ci-dessus au point M'.

L'action du gel sur les molécules est modélisée par une force de frottement $\vec{f}$

<u>Données</u>

– masse d'un ion aspartate : $m_{aspart} = 2{,}12\times10^{-25}$ kg

– masse d'un ion glutamate : $m_{glutam} = 2{,}43\times10^{-25}$ kg

– norme de la force électrostatique subie par les ions aspartate et glutamate : $F_e = e \times E$

avec • E = 520 V·m^{-1} : intensité du champ électrostatique ;

• e = $1{,}6\times10^{-19}$ C : valeur absolue de la charge portée par chaque anion d'acide aspartique ou d'acide glutamique.

– expression vectorielle de la force $\vec{f}$ exercée par le gel : $\vec{f} = -k \times \vec{v}$

avec • k le coefficient caractéristique du constituant et du milieu dans lequel s'effectue la migration :
pour l'ion aspartate $k_{aspart} = 2{,}7\times10^{-12}$ N·s·m^{-1}
pour l'ion glutamate $k_{glutam} = 3{,}0\times10^{-12}$ N·s·m^{-1}

• $\vec{v}$ le vecteur vitesse de l'ion concerné.

A.1. En justifiant la réponse, représenter, sans souci d'échelle, le vecteur force $\vec{f}$ modélisant l'action du gel sur les anions au point M'.

A.2. Écrire la seconde loi de Newton pour un anion de masse m et l'appliquer dans le cas de l'électrophorèse considérée.

A.3. Projeter la relation vectorielle sur l'axe (Mx) et montrer que la valeur de la vitesse v de migration de l'anion considéré est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \times v = \frac{e \times E}{m}$$

PARTIE B – Étude du mouvement de l'ion d'acide aspartique

Par application numérique, l'équation différentielle ci-dessus peut s'écrire sous la forme :

$$v' = -1{,}3 \times 10^{13}\ v + 3{,}9 \times 10^{8}$$

où la vitesse v est exprimée en mètre par seconde ($m \cdot s^{-1}$) et le temps t est exprimé en seconde (s).

B.1. Déterminer la solution générale v de cette équation différentielle définie sur [0 ; +∞[.

B.2. Sachant que $v(0)=0$, montrer que, pour tout t ∈[0 ; +∞[,

$$v(t) = 3 \times 10^{-5}(1 - e^{-1{,}3\times10^{13}t})$$

B.3. Justifier que $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 3 \times 10^{-5}$

B.4. On note t_{90} l'instant exprimé en seconde pour lequel la vitesse atteint 90 % de sa vitesse limite.

Montrer que t_{90} = $1{,}8.10^{-13}$ arrondi à 10^{-14} .

PARTIE C – Détermination de la durée de migration

Les résultats précédents montrent que le régime stationnaire est atteint quasi instantanément, si bien que l'on peut considérer que les constituants du mélange se déplacent suivant un mouvement rectiligne uniforme avec une vitesse constante égale à :

$$v_{lim} = \frac{e \times E}{k}$$

C.1. Comparer la vitesse limite de migration des ions glutamate et des ions aspartate.

C.2. En fin d'électrophorèse, les taches sont révélées sous lumière ultraviolette. On admet qu'une différence de distance de migration d'au moins 5 mm est nécessaire pour distinguer la tache associée au mouvement des ions glutamate et celle associée au mouvement des ions aspartate.

- Déterminer la durée minimale de l'électrophorèse et les distances alors parcourues par les ions pour pouvoir distinguer les deux taches correctement.