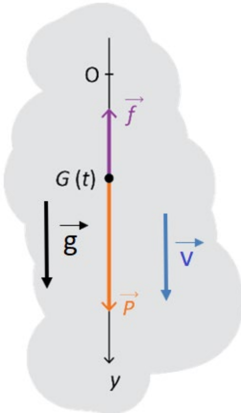
Séquence 5	**Chute verticale avec frottements**

A. Situation étudiée



Situation étudiée :

Le système étudié et un objet en mouvement de chute dans un fluide visqueux, sans vitesse initiale.
Son mouvement est étudié dans un repère (Oy), vertical et orienté vers le bas, dont l'origine coïncide avec la position initiale de son centre d'inertie.

$$\vec{V}\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v \end{cases}$$

Forces exercées sur le système

Comme le système étudié est en mouvement dans un fluide, celui-ci exerce une **force de frottement**.
Nous envisageons ici le cas où la force de frottement a une valeur proportionnelle à celle de la vitesse du système

Le système est donc soumis à 2 forces :

Son poids	*La force de frottement visqueux*
$\vec{P} = m\,\vec{g}$	$\vec{f} = -k \times \vec{v}$ avec $\vec{V}\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v \end{cases}$
$\vec{P}\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = mg \end{cases}$	$\vec{f}\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = -kv \end{cases}$

Le mouvement se fait uniquement suivant l'axe y dirigé vers le bas

Remarque : *dans l'expression de la force de frottement, k est une constante qui dépend du fluide et de la forme de l'objet en mouvement.*
Dans certains exercices, on tiendra compte également de la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ telle que
$\Pi = \rho_{liquide} \times V_{objet} \times g$

Rappel :

Forme de l'équation différentielle	**Solution de l'équation différentielle**
$y' + ay = 0$	$y = k \times e^{-ax}$
$ay' + by = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{b}{a}y = 0$	$y = k \times e^{-\frac{b}{a}x}$
$y' + ay = b$	$y = k \times e^{-ax} + \frac{b}{a}$

B. Etude quantitative du mouvement

B.1. Variation de la vitesse au cours du mouvement

Énoncé de la deuxième loi de Newton	$\sum \overrightarrow{F} = m \times \overrightarrow{a}$ $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{f} = m \times \overrightarrow{a}$
Projection sur l'axe Oy	$mg - kv = m \times a$ $mg - kv = m \times \frac{dv}{dt}$ $g - \frac{k}{m}v = \frac{dv}{dt}$ $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$
Solution de l'équation différentielle	$v(t) = A \times e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$
Détermination de la constante A grâce à la condition initiale v(0)=0 (l'objet est lâché sans vitesse initiale)	$v(0) = A \times e^{-\frac{k}{m}\times 0} + \frac{mg}{k} = 0$ $A \times 1 + \frac{mg}{k} = 0$ ↳ $A = -\frac{mg}{k}$
Solution de l'équation différentielle	$v(t) = -\frac{mg}{k} \times e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$ $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$
Lorsque t → ∞	$v_{lim} = v(t \to \infty) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = \frac{mg}{k}$ La vitesse atteint une vitesse limite : $v_{lim} = \frac{m \times g}{k}$
Solution de l'équation différentielle	$v(t) = v_{lim} \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ **avec** $\tau = \frac{m}{k}$ **et** $v_{lim} = \frac{m \times g}{k}$

Remarque : *recherchons l'unité de τ ....*

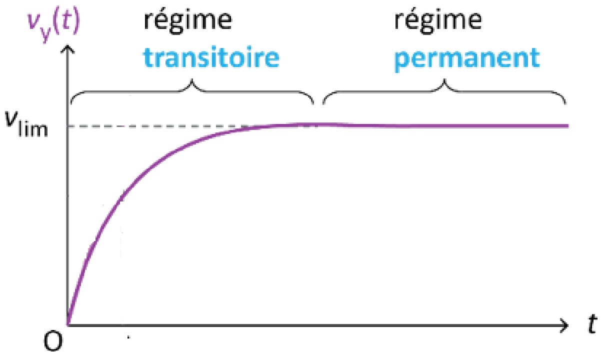
$v_{lim} = g \times \tau \to \tau = \frac{v_{lim}}{g}$ *Analyse dimensionnelle :* $[\tau] = \frac{[v_{lim}]}{[g]} = \frac{L.T^{-1}}{L.T^{-2}} = T$

L'équation aux dimensions d'une formule physique est une « équation de grandeurs », qui a la même forme que la formule physique initiale, mais dans laquelle on ne tient pas compte des nombres, des constantes numériques sans dimension ; interviennent uniquement les grandeurs physiques.

↳ La grandeur τ est un temps, elle s'exprime en s : elle est nommée « constante de temps » ou « temps caractéristique »

B.2. Régime transitoire et régime permanent

- Le mouvement peut être décomposé en deux phases :



- une phase de mouvement accéléré, appelé **régime transitoire**
- une phase de mouvement uniforme, appelée **régime permanent**. La vitesse alors atteinte est appelée **vitesse limite** et notée v_{lim}.

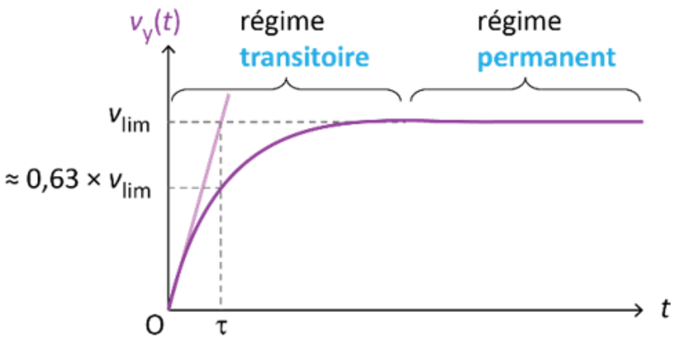
B.3. La constante de temps τ

- La solution de l'équation différentielle est donc : $v(t) = v_{lim} \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

Lorsque t = τ ➪ $v(\tau) = v_{lim} \times \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = v_{lim} \times \left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}63 v_{lim}$

On peut évaluer graphiquement la valeur de la constante de temps par deux méthodes :

- c'est la durée au bout de laquelle la vitesse atteint 63% de sa valeur limite ;
- c'est l'abscisse du point où la tangente à la courbe $v_y(t)$ à la date $t = 0$ coupe la droite horizontale d'ordonnée v_{lim}.



On estime que le régime permanent est atteint lorsqu'il s'est écoulé une durée égale à 5τ